§0: Die Komplexen Zahlen

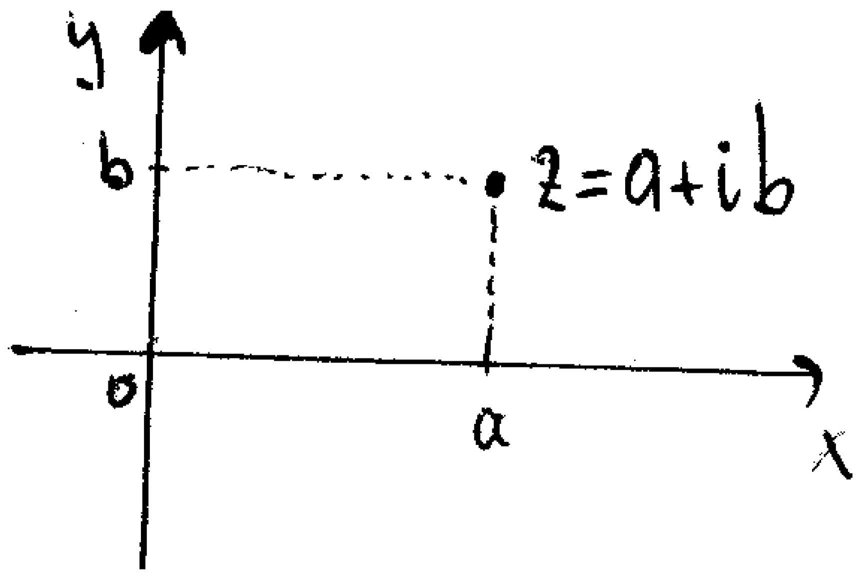
Def: Eine Komplexe Zahl ist ein Ausdruck der Form
$z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Seien $x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$.

Def: 1) Gleichheit: $x + iy = \tilde{x} + i\tilde{y} \Leftrightarrow (x = \tilde{x} \wedge y = \tilde{y})$.

2) $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der Komplexen Zahlen.

Darstellung einer Komplexen Zahl
$z = a + ib$ in der Gaußschen Zahlenebene



3) Addition: $(x + iy) + (\tilde{x} + i\tilde{y}) := x + \tilde{x} + i(y + \tilde{y})$.

4) Multiplikation: $(x + iy)(\tilde{x} + i\tilde{y}) := x\tilde{x} - y\tilde{y} + i(x\tilde{y} + y\tilde{x})$.

Satz 0.1: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweisskizze: $0 := 0 + i0$ ist das neutrale Elem. für $+$.
$-x + i(-y)$ ist das Inverse von $x + iy$ für $+$.
$1 := 1 + i0$ ist das neutrale Elem. für $\cdot$.

Sei $z = x + iy \neq 0$. $(x + iy)(x + i(-y)) = x^2 + y^2 + i(\overbrace{-xy + yx}^{0}) = x^2 + y^2$,
also $(x + iy)\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right) = 1$. $\frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ ist das Inverse von $x + iy$ für $\cdot$.

Bem: i) $x + iy$ wird auch oft $x + yi$ geschrieben.

ii) $\mathbb{R}$ kann als Unterkörper von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden (2)
denn $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus:
$x \longmapsto x + i \cdot 0$

$f(1) = 1,\ f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

iii) In $\mathbb{C}$ wird genauso wie in $\mathbb{R}$ gerechnet mit der zusätlichen Bedingung $i^2 = -1$. $[i^2 = (0+i1)(0+i1) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + i \cdot 0 = -1]$

Beispiele: a) $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) \overset{\text{ausmult.}}{=} 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ oder
$(1+i)^2 \overset{\text{1. bin. Form}}{=} 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

b) $\dfrac{1}{2+3i} \overset{\text{Trick}}{=} \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13} i$.

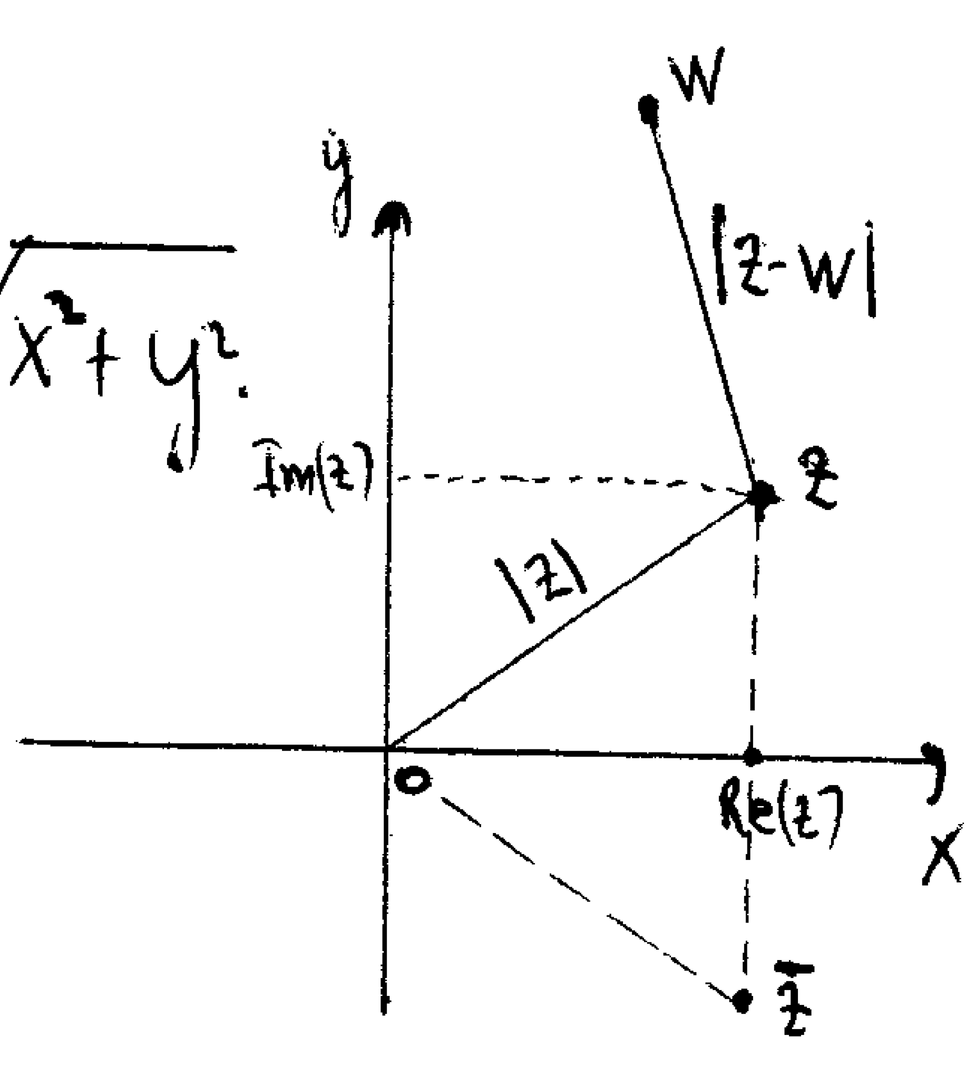
c) $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = i^2 i^2 = 1 \Rightarrow i^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv 0 \bmod 4 \\ i & \text{"} \quad n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{"} \quad n \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & \text{"} \quad n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$

Bem: Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kann nicht angeordnet werden denn $i^2 = -1 < 0$. [In jedem angeordneten Körper K gilt $x^2 \geq 0$ $\forall x \in K$]

Def: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

i) Der Betrag von z wird definiert durch $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

ii) Die zu z komplexe konjugierte Zahl wird definiert durch $\bar{z} := x - iy$ [Spiegelung an der x-Achse]

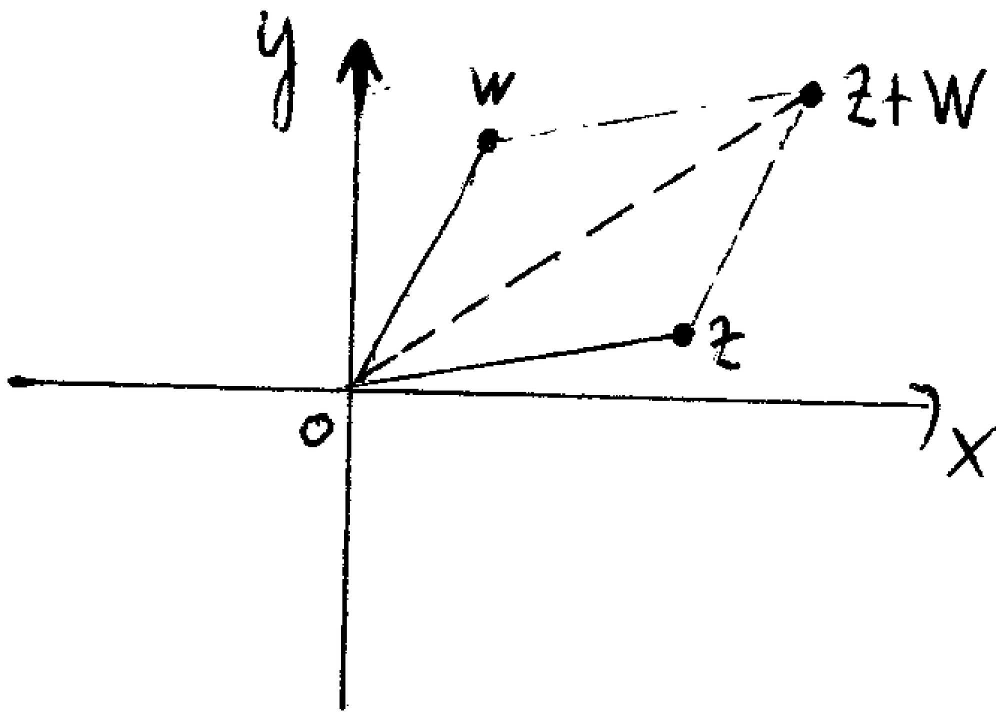


iii) $x = \mathrm{Re}(z)$ heißt der Realteil von z

$y = \mathrm{Im}(z)$ " " Imaginärteil von z.

Bem: Für $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|z-w|$ der Abstand von z zu w.

Lemma 0.2: Seien $z, w \in \mathbb{C}$.



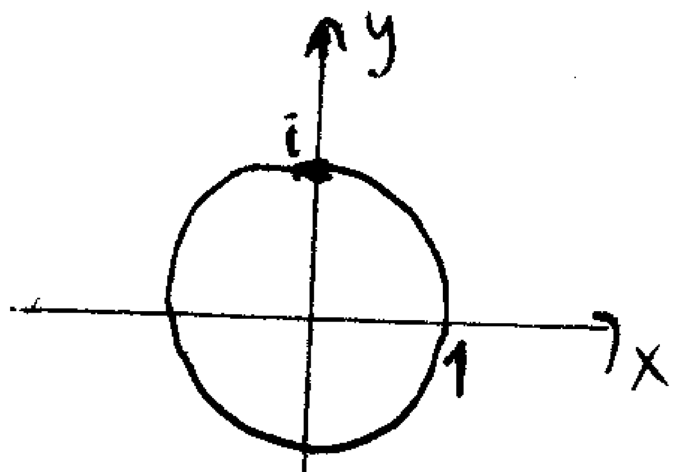
a) $|z| \geq 0$ b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ c) $|z|^2 = z\bar{z}$

d) $|zw| = |z| \cdot |w|$ e) $|z+w| \overset{\Delta}{\leq} |z| + |w|$.

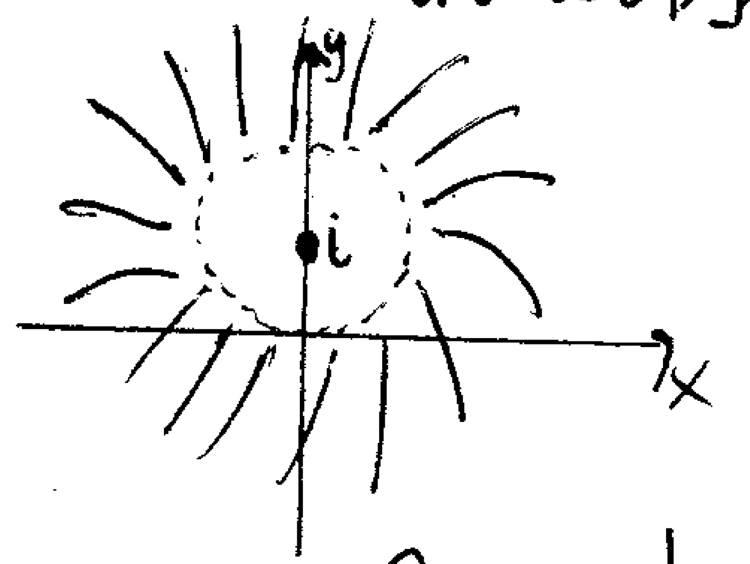
i) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ ii) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ iii) $\bar{\bar{z}} = z$ iv) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. $\square$

Beispiele:

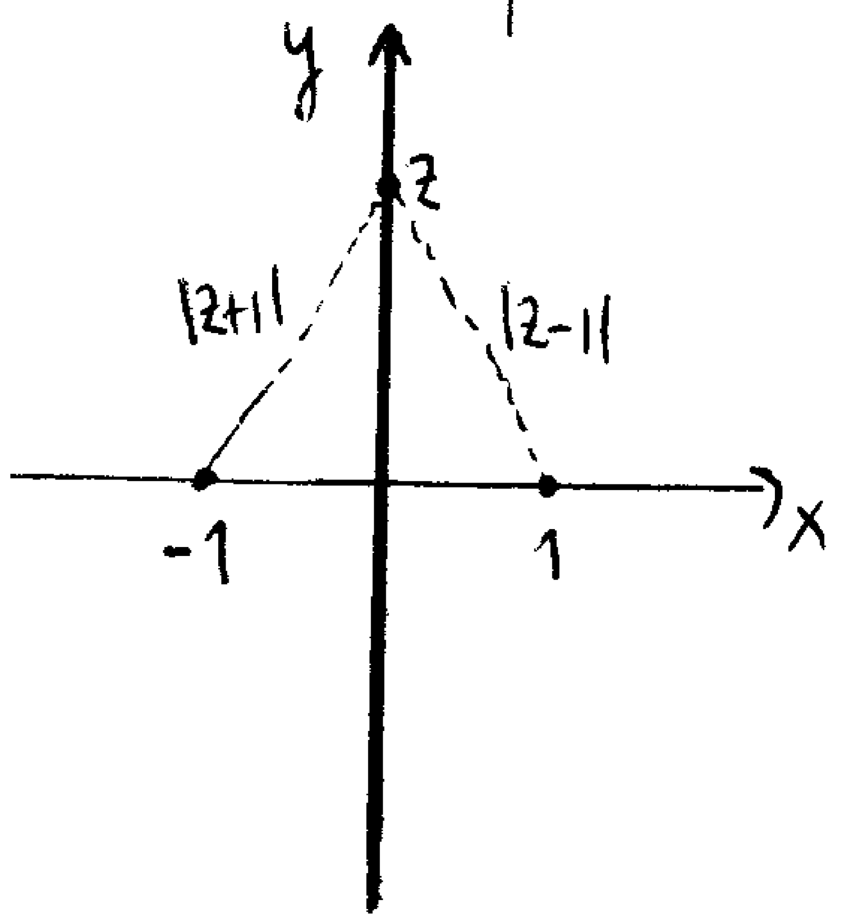
i) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist der Einheitskreis



ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| > 1\}$



iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = \underbrace{|z+1|}_{= |z-(-1)|}\}$ Geometrisch:



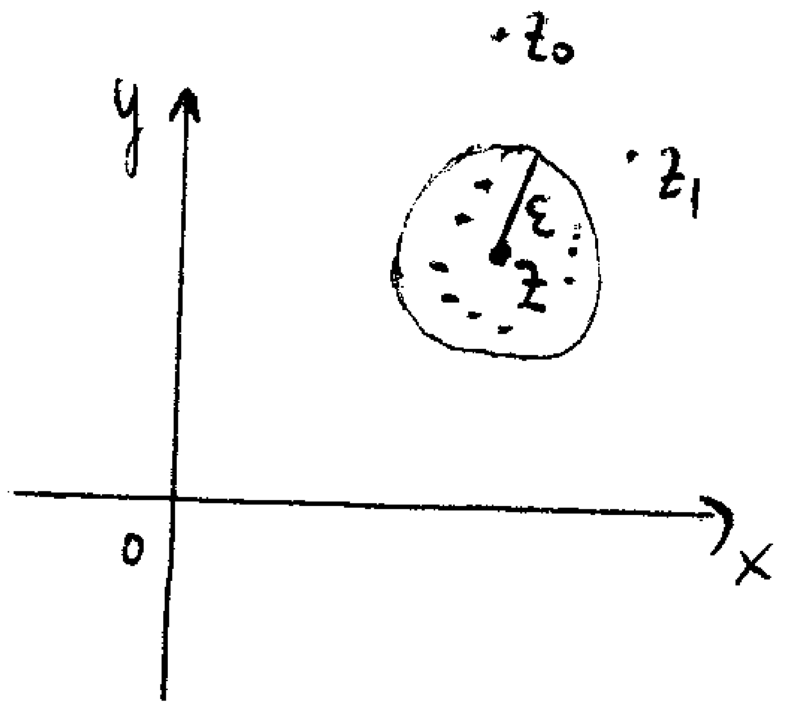
Rechnerisch: Sei $z = x + iy$. $|z-1| = |z+1| \overset{0.2a)}{\Leftrightarrow}$
$|z-1|^2 = |z+1|^2 \overset{0.2c)}{\Leftrightarrow} (z-1)\overline{(z-1)} = (z+1)\overline{(z+1)} \overset{0.2\, i), iv)}{\Leftrightarrow} (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow$
$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow -z - \bar{z} = z + \bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x + iy + x - iy = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z = iy$.

iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2z + 3\bar{z} = 1\}$. Sei $z = x + iy$. $2z + 3\bar{z} = 2(x+iy) + 3(x-iy) =$
$2x + 2iy + 3x - 3iy = 5x - iy$. Also $2z + 3\bar{z} = 1 \Leftrightarrow 5x - iy = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 1 \\ -y = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x = 1/5,\ y = 0$.

Es folgt $\{z \in \mathbb{C} \mid 2z + 3\bar{z} = 1\} = \{\frac{1}{5}\}$.

Folgen in $\mathbb{C}$

Def: Eine komplexe Folge ist eine Abbildung $\underset{n \mapsto z_n}{\overset{\text{„}\{0,1,2,\dots\}\text{"}}{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}}$.
Notation für diese Folge: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (z_n).



Def: a) Eine Folge (z_n) konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.

b) Eine Folge (z_n) heisst beschränkt falls $\exists M > 0$ mit $|z_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Keine Def. für monotone Folge [denn keine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$].

Notation: Falls eine Folge (z_n) gegen z konvergiert schreibt man $z_n \to z\ (n \to \infty)$ oder $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

Bem: i) Sei $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, und $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
$z_n \to z\ (n\to\infty) \iff x_n \to x$ und $y_n \to y\ (n \to \infty)$.

ii) $z_n \to 0\ (n\to\infty) \iff |z_n| \to 0\ (n \to\infty)$.

Fast alle Ergebnisse über reelle Folgen (s. Ana I) gelten auch für komplexe Folgen. Gilt nicht für komplexe Folgen:

a) Jede monotone beschränkte Folge ist konvergent.

b) Das Sandwich-Lemma.

Def: Sei (z_n) eine komplexe Folge. $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Lemma 0.3: Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z|<1 \\ \infty & \text{"} \quad |z|>1 \\ 1 & \text{"} \quad z = 1 \\ \text{existiert nicht, falls } |z|=1,\ z\neq 1. \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> Folgt leicht aus der Multiplikativität des Betrags $|z^n| = |z|^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und (s. Ana I) $\lim_{x\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{wenn } x > 1 \\ 0 & \text{wenn } 0 < x < 1 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Reihen in $\mathbb{C}$

Sei (z_n) eine komplexe Folge, $s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$ $(n \in \mathbb{N})$.

<u>Def:</u> i) Die Folge (s_n) heißt Reihe mit den Gliedern z_n und wird mit $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ bezeichnet.

ii) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert $\iff$ die Folge (s_n) konvergiert.

iii) Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert, dann wird ihr Grenzwert (Summe) auch mit $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ bezeichnet.

iv) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt absolut konvergent falls $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.

v) Das Cauchy-Produkt von 2 komplexen Reihen wird wie für reelle Reihen definiert.

<u>Bleiben gültig:</u>

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

b) Für $q \in \mathbb{C}$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konvergiert absolut gegen } 1/1-q & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{divergiert} & \text{falls } |q| \geq 1. \end{cases}$

c) Rechenregeln, absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent, Quotienten- und Wurzelkriterium, Cauchy Produkt von 2 absolut konvergenten Reihen ist absolut konvergent und

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}\right).$$

Aber: Kein Majoranten- und Minorantenkriterium.
Kein Leibniz-Kriterium.

Die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Def: Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. [Nach dem Quotienten-Kriterium konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ denn
$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{z^n}{n!}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty) \ ].$$

Satz 0.4 (Funktionalgleichung für e^z).
$$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Beweis: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, $e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$.

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}\right)$$

Satz zum Cauchy-Produkt (s. Ana I)

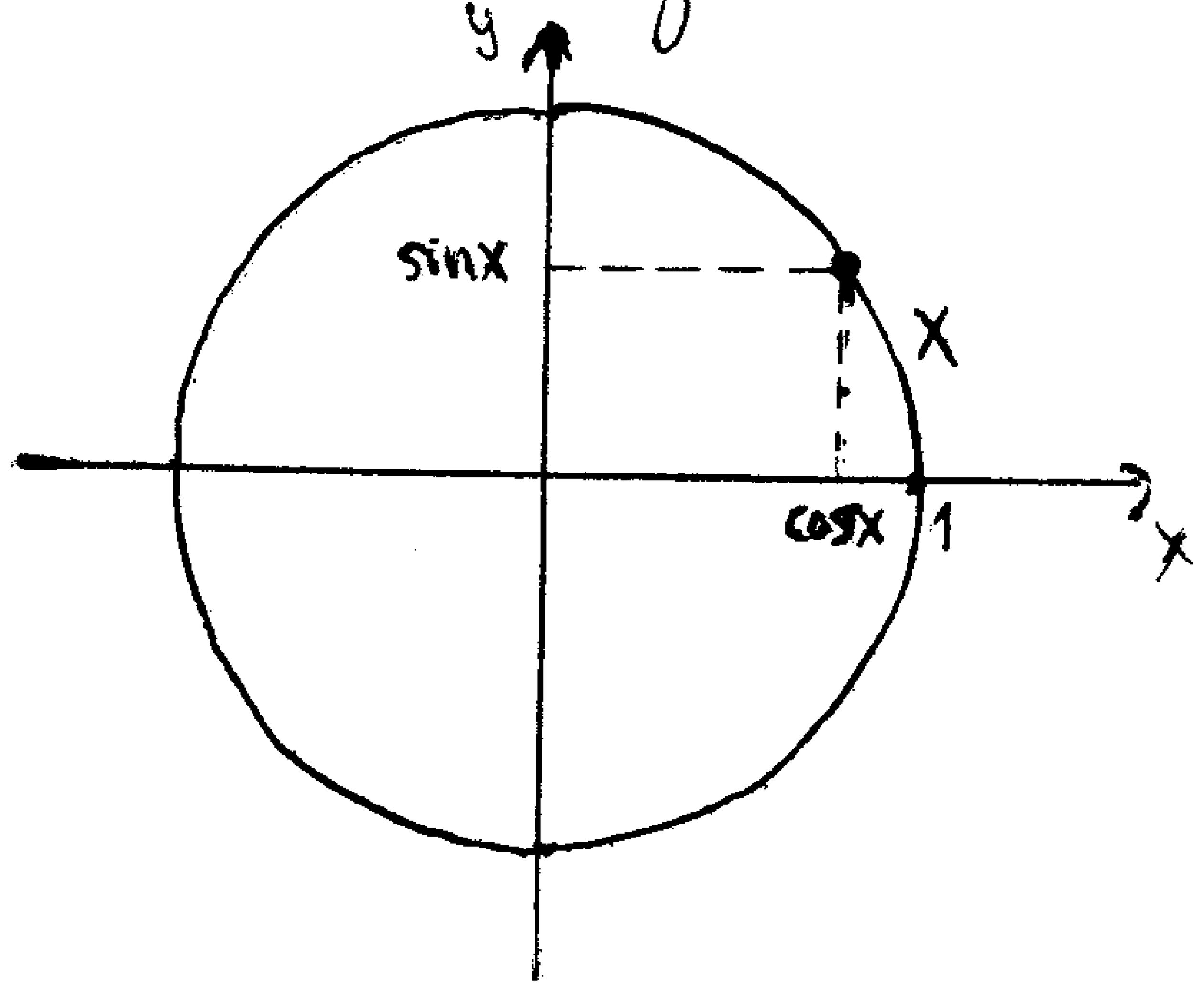
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w} \qquad \square$$

Binom. Lehrsatz (s. AZ I)

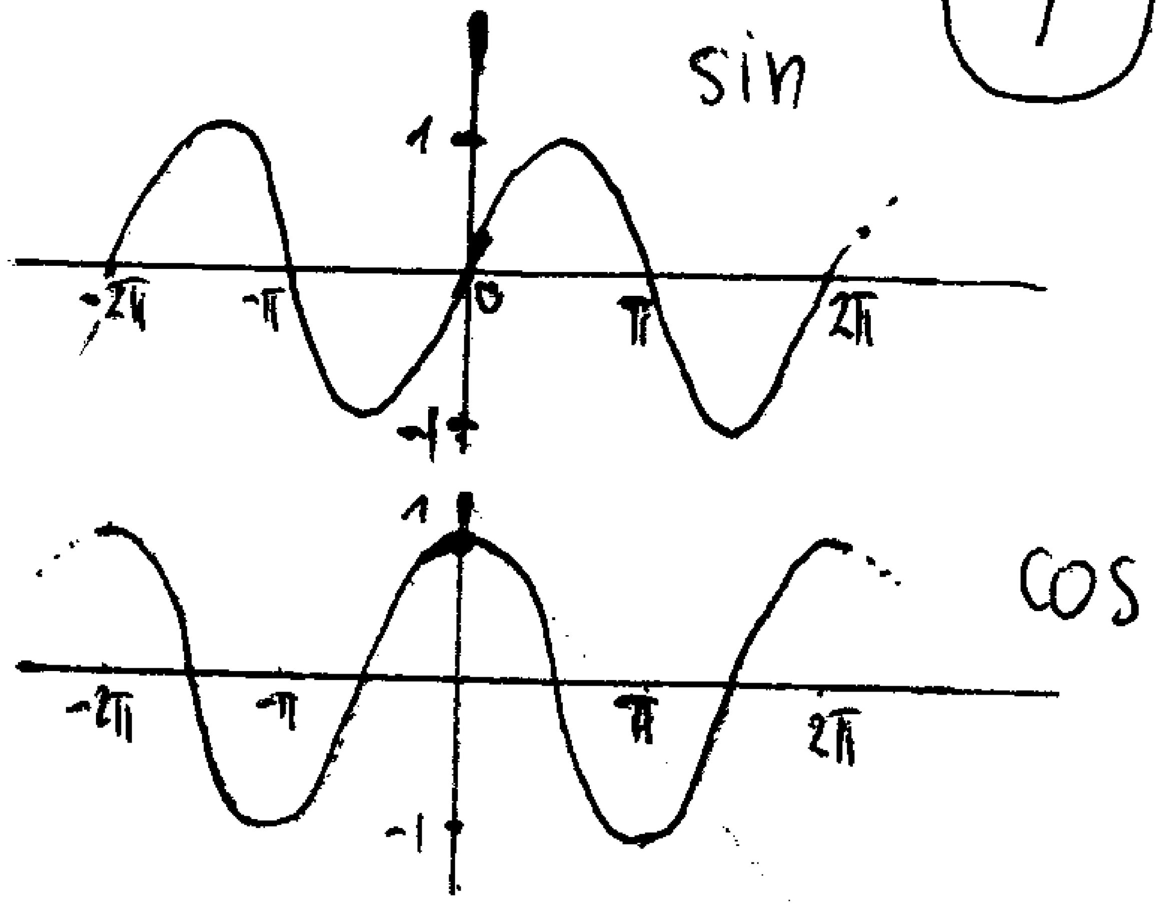
Satz 0.5 (Eulersche Formel) $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$

Beweis:
$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x, \ x \in \mathbb{R}.$$
$\square$

[Zur Erinnerung: (s. Ana I)



$\cos(x+2\pi) = \cos x$
$\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

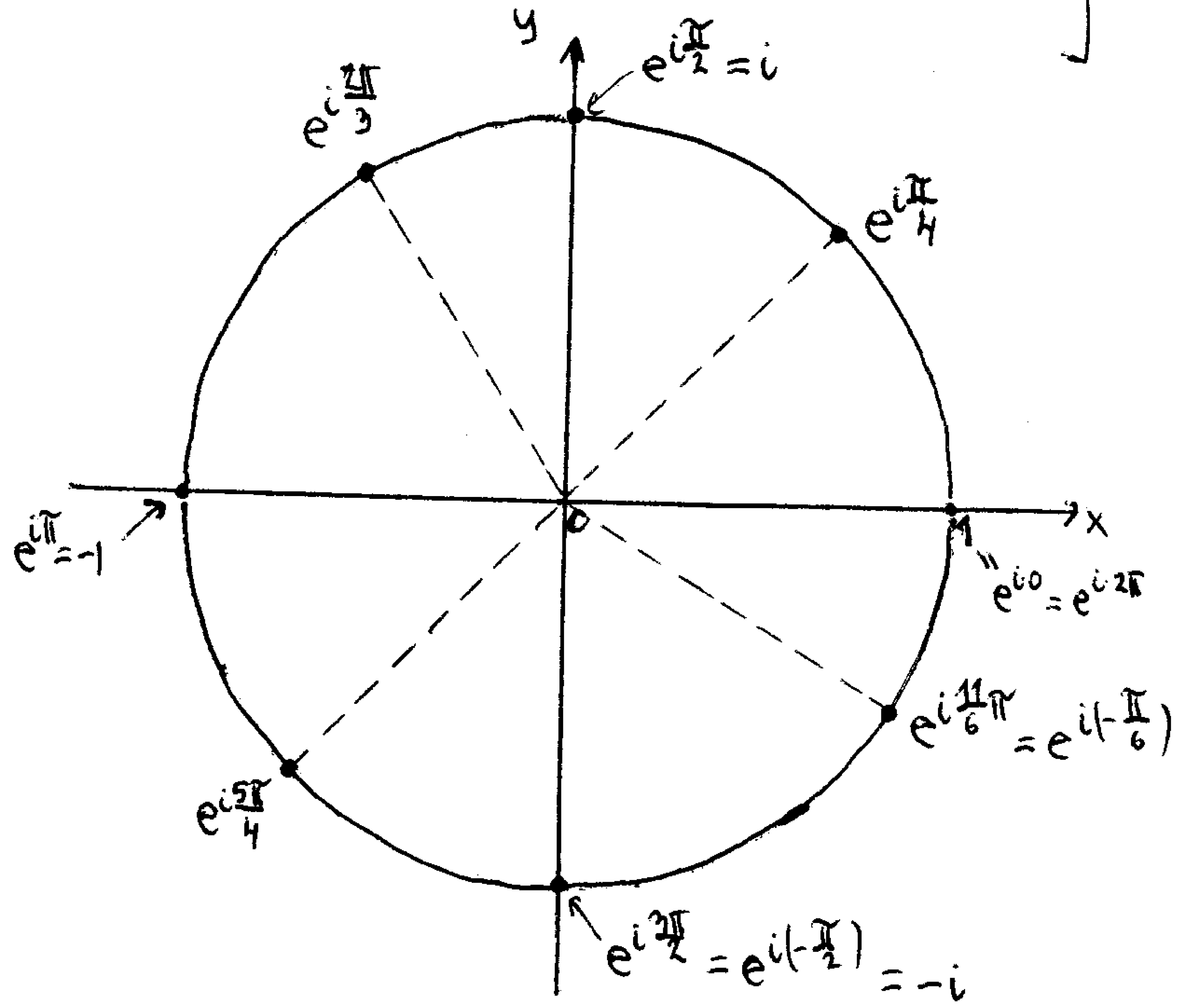


$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagoras)]

Sei $x \in \mathbb{R}$. e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis denn

$|e^{ix}|^2 \overset{0.5}{=} |\cos x + i \sin x|^2 =$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

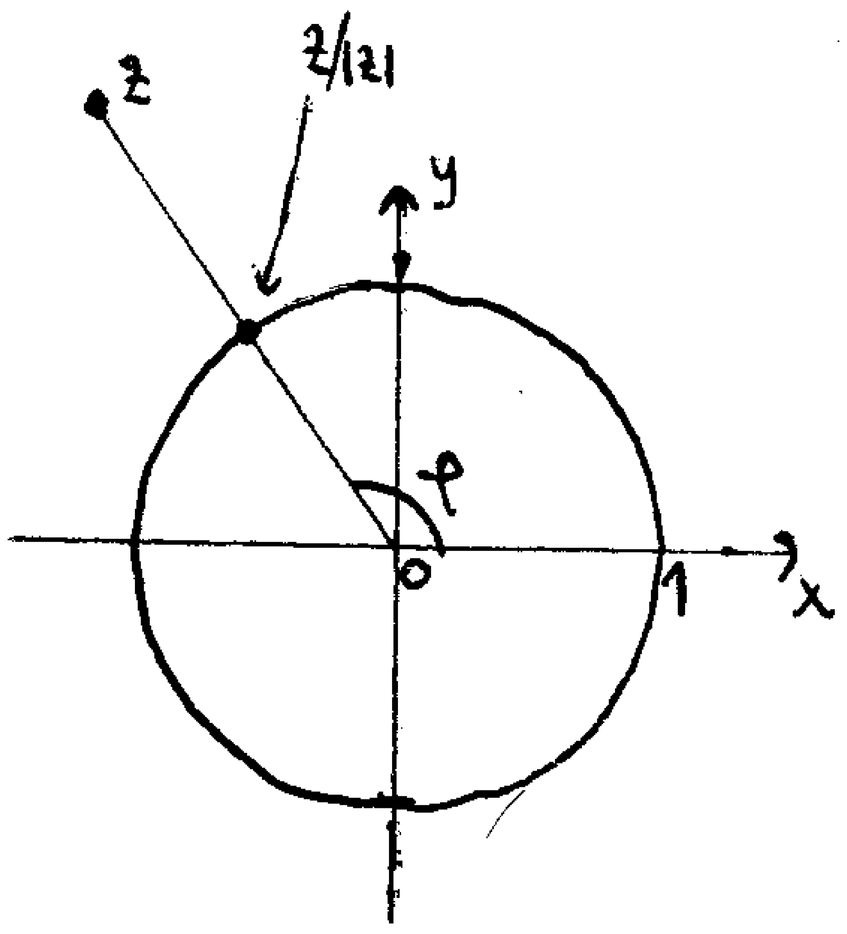
$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Polarform einer komplexen Zahl $z \neq 0$

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

$z = |z| \frac{z}{|z|}$ und $\frac{z}{|z|} \in S^1$ denn $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} \overset{|z|>0}{=} \frac{|z|}{|z|} = 1.$



Bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π gibt es ein eindeutiges $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$.

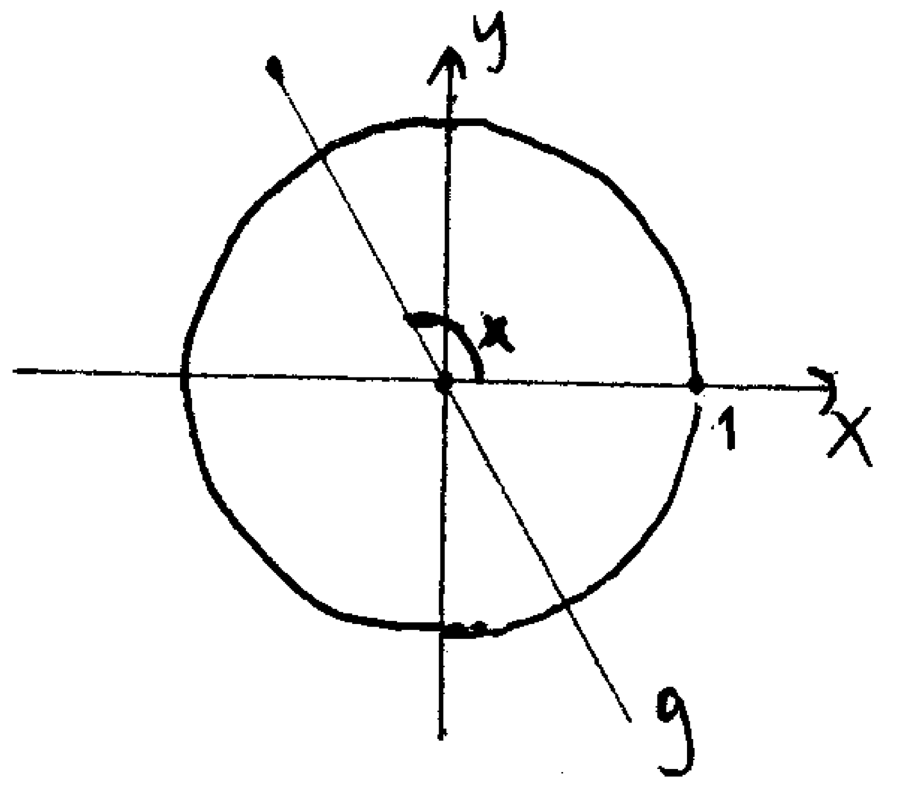
Also $z = re^{i\varphi}$, wobei $r = |z|$ und $z/|z| = e^{i\varphi}$.

$re^{i\varphi}$ heißt Polarform von z.

Um den Winkel φ bestimmen zu können ist es günstig, die Funktion Tangens einzuführen.

Def: $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

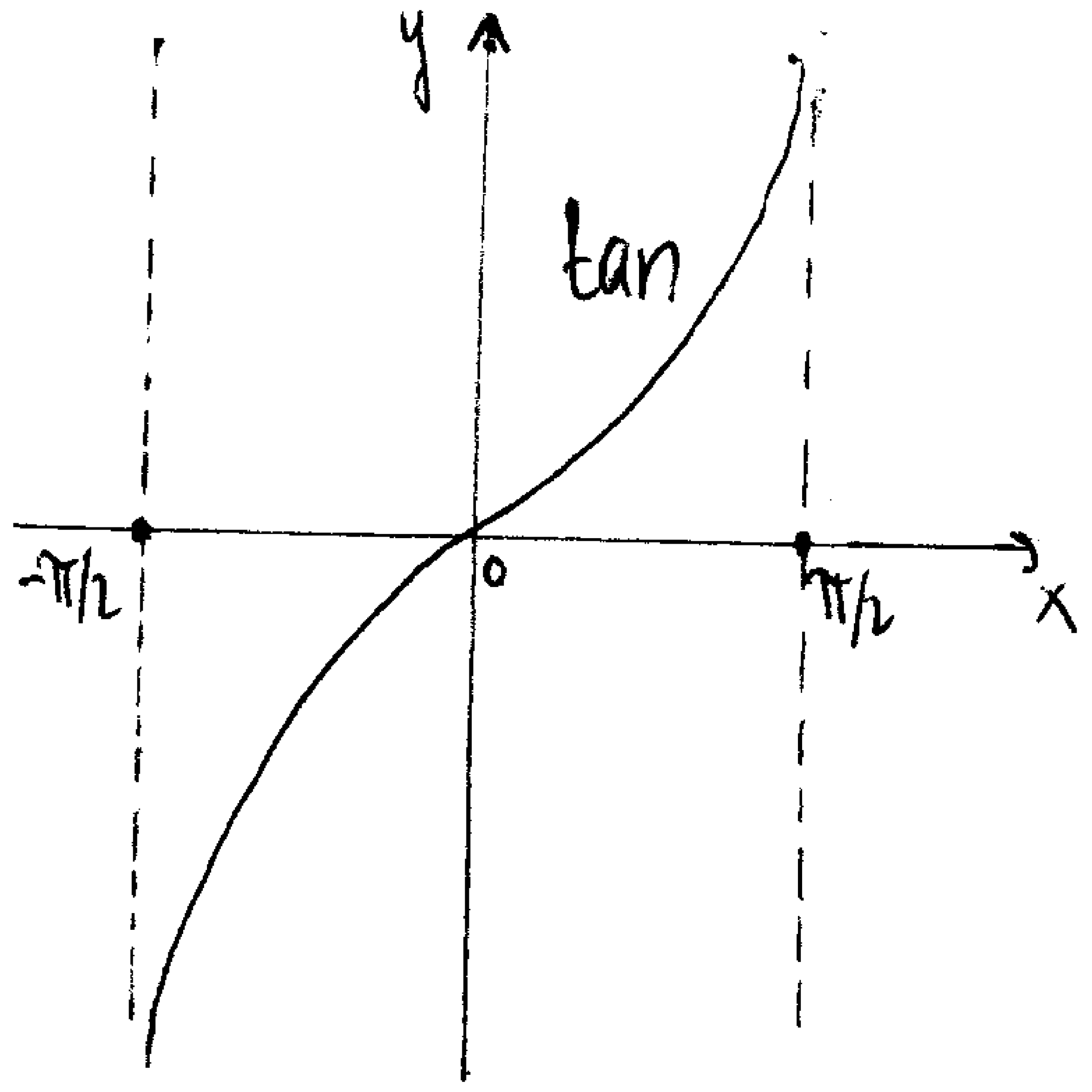
Geometrisch: $\tan x$ ist die Steigung der nebenstehenden Geraden g.



Satz 0.6:

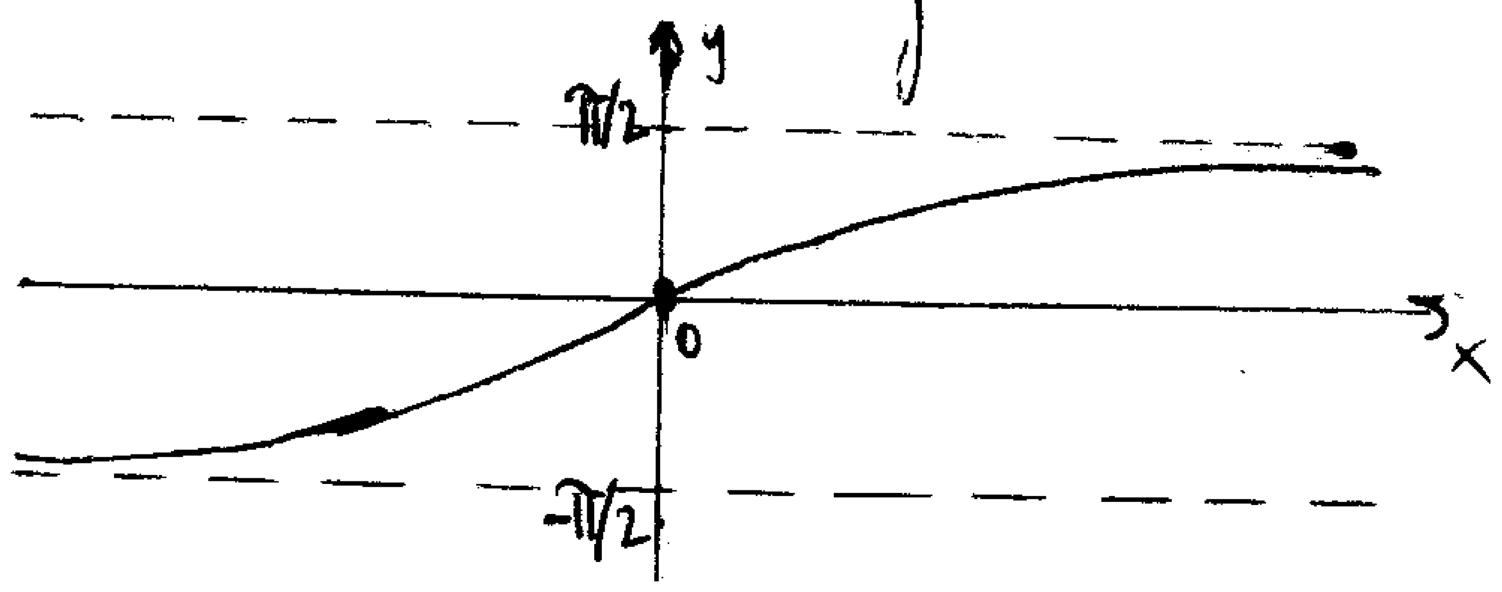
a) $\tan$ ist stetig. b) $\tan$ ist π-periodisch.

c) $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv und streng monoton wachsend.



Beweis: Folgt aus den Eigenschaften von cos und sin. $\square$

Def: $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist die Umkehrabbildung von $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.



Lemma 0.7:

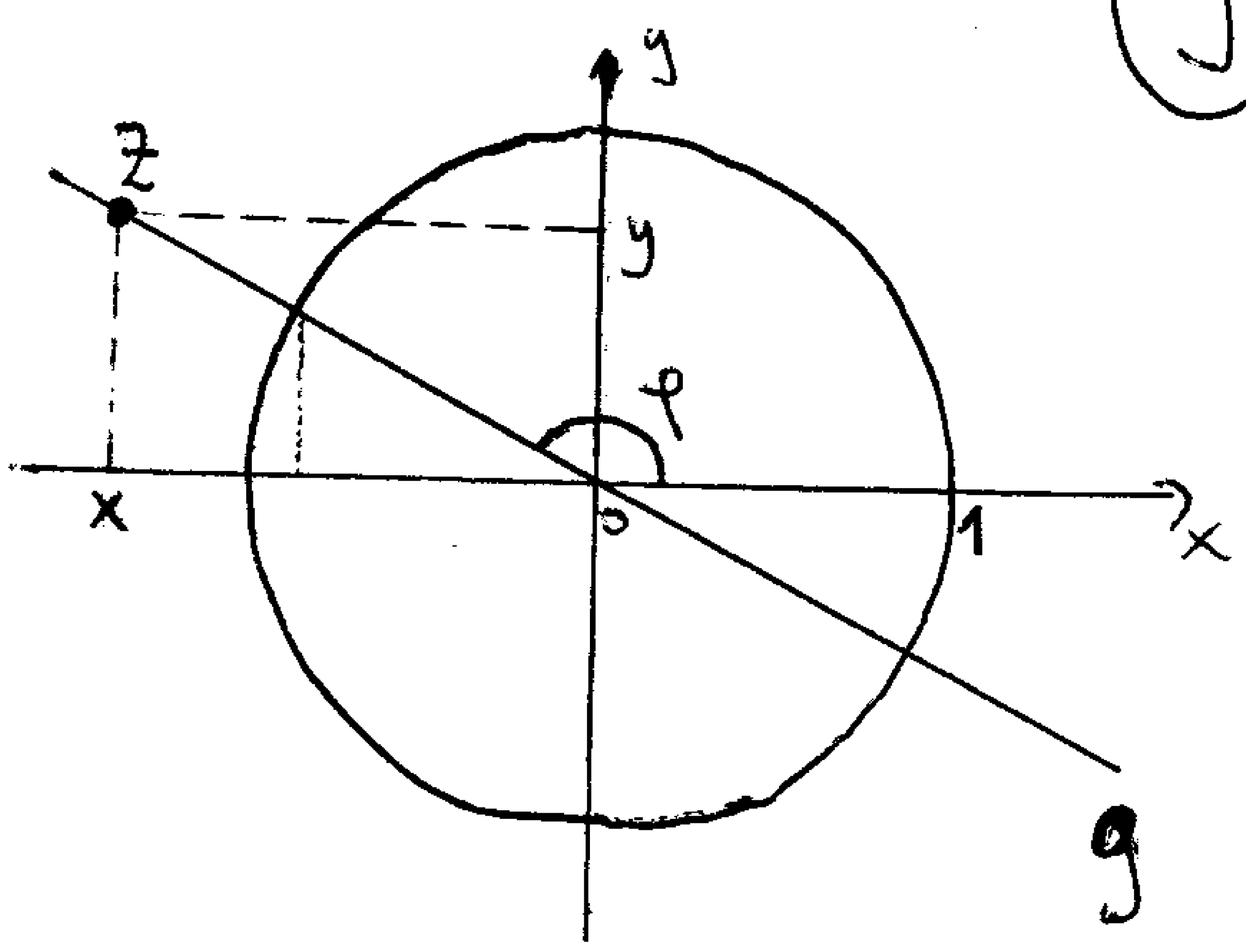
Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy \neq 0$. Für die Polarform $z = re^{i\varphi}$ gilt

$$r = |z| \text{ und } \varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{falls } x < 0 \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{falls } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

<u>Begründung:</u> Ang. $x<0$, $y>0$.

$$y/x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Elem.} \\ \text{Geom.}}}{=} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = \text{Steigung von } g$$

$$\underset{y/x<0}{\Longrightarrow} \varphi = \arctan(y/x) + \pi.$$

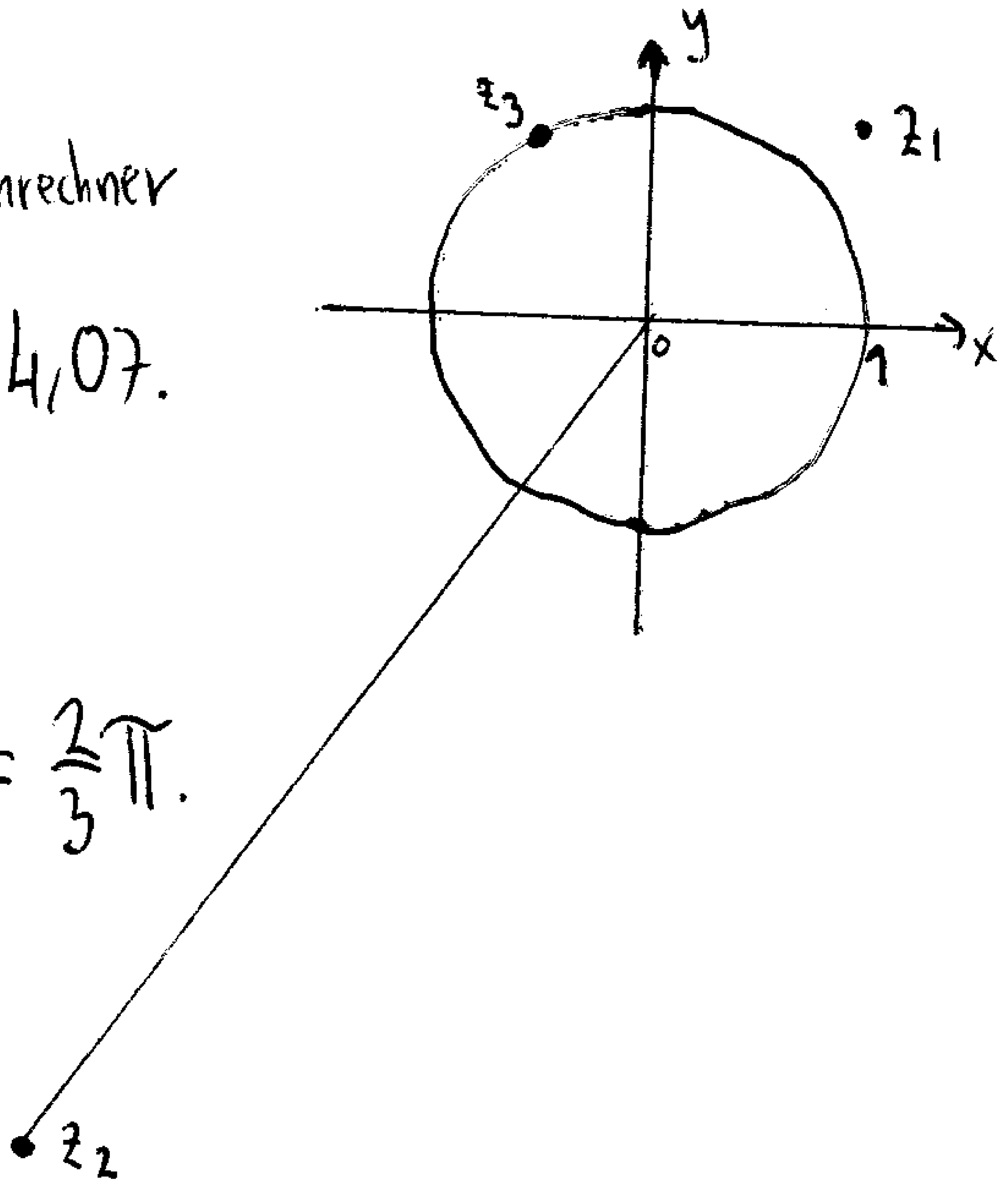


□

<u>Beispiele:</u>

Seien $z_1 = 1+i$, $z_2 = -3-4i$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- $r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \arctan(1/1) = \pi/4$.
  Polarform von z_1: $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
- $r_2 = |z_2| = \sqrt{9+16} = 5$, $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) + \pi \overset{\substack{\text{Taschenrechner} \\ \downarrow}}{\simeq} 4{,}07$.
  Polarform von z_2: $z_2 \simeq 5e^{i\,4{,}07}$.
- $r_3 = |z_3| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$, $\varphi_3 = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2}{3}\pi$.
  Polarform von z_3: $z_3 = 1 \cdot e^{i2\pi/3} = e^{i2\pi/3}$.



<u>Lemma 0.8:</u>

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ (z_1, z_2 in Polarform). Dann:

a) $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ c) $z_1^n = r_1^n e^{in\varphi_1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

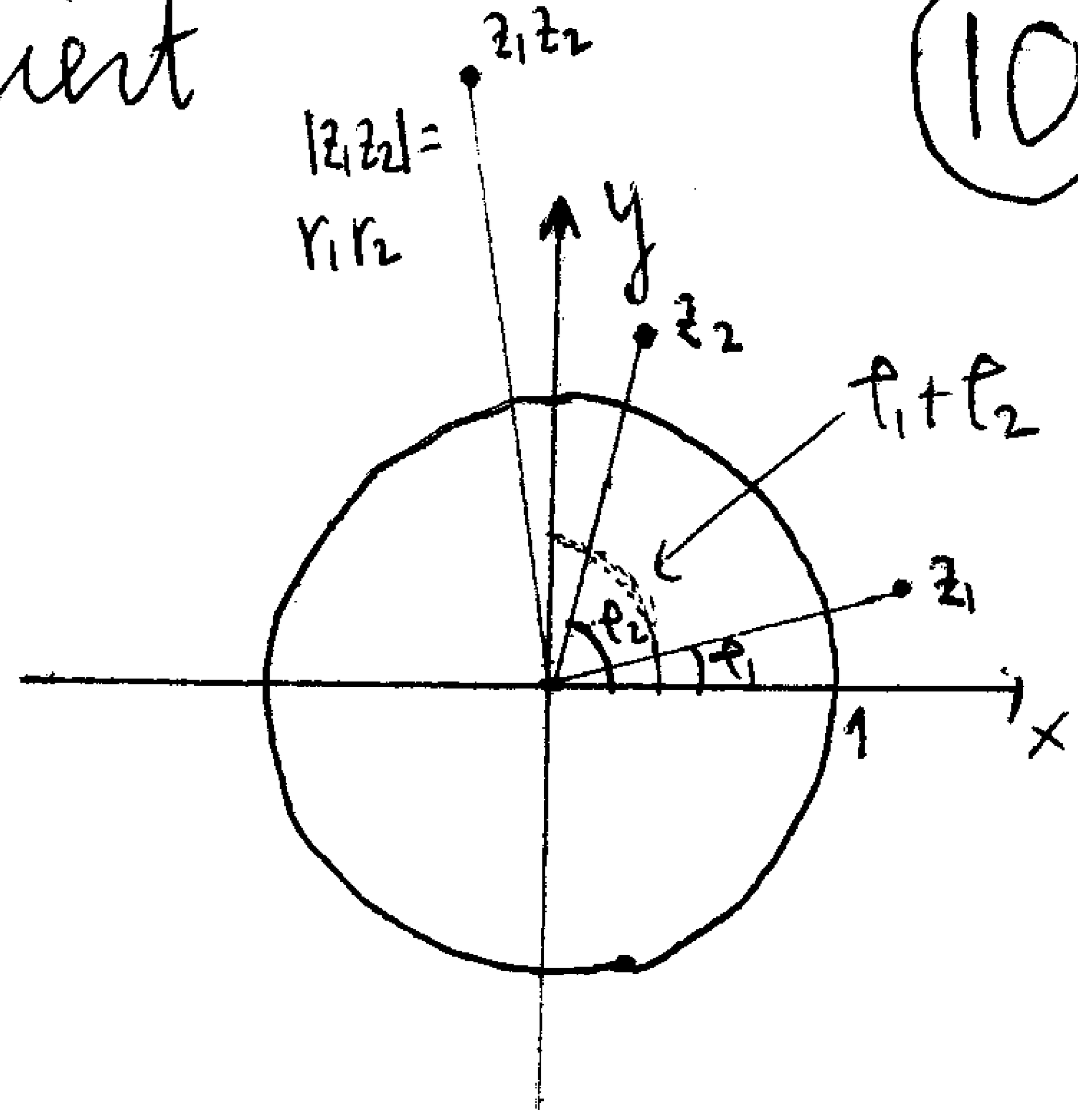
<u>Beweis:</u> Zu a): $z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} \overset{0.4}{=} r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Zu b): Analog zu a).

Zu c): Induktion über n für $n \geq 0$. Für $n<0$ benutze man $z_1^n = 1/z_1^{-n}$ und $-n>0$.

□

Bem: 0.8a) bedeutet: Man multipliziert 2 komplexen Zahlen indem man ihre Beträge multipliziert und Winkel addiert.



Beispiel: Sei $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Was ist z^{100}?

Polarform von z: $r = |z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$.

Also $z = e^{i\pi/3}$ $\quad z^{100} = (e^{i\pi/3})^{100} \overset{0.8c)}{=} e^{i\frac{100}{3}\pi} = e^{i(33\pi + \pi/3)} \overset{0.4}{=} e^{i33\pi} \cdot e^{i\pi/3}$

$\overset{0.8c)}{=} (e^{i\pi})^{33} \cdot e^{i\pi/3} = (-1)^{33} e^{i\pi/3} = -e^{i\pi/3} = -z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lemma 0.9: Sei $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}^*$. Sei $w = re^{i\varphi}$ die Polarform von w. Die Gleichung $z^n = w$ besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen $z_0, z_1, .., z_{n-1}$ und $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n})}$, $0 \leq k \leq n-1$.
Die Punkte z_k $(0 \leq k \leq n-1)$ liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

Beweis: • $z_k^n = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n})}\right)^n \overset{0.8}{=} r\cdot e^{i(\varphi + k\cdot 2\pi)} \overset{e^{i2\pi}=1}{=} re^{i\varphi} = w \quad \forall k \leq n-1$,
also ist z_k Lösung von $z^n = w$.

• $|z_k| = \sqrt[n]{r}\, \left|e^{i(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n})}\right| = \sqrt[n]{r} \quad \forall k \leq n-1$ denn $|e^{ix}| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

• $z_{k+1}/z_k = e^{i2\pi/n} \quad \forall k \leq n-1 \Rightarrow \measuredangle(z_k, 0, z_{k+1}) = 2\pi/n \quad \forall k \leq n-1 \quad [z_n := z_0]$.

• $p(z) := z^n - w$ ist ein Polynom vom Grad n $\Rightarrow$ $z^n = w$ hat höchstens

n Lösungen in $\mathbb{C}$. Also sind $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ alle Lösungen in $\mathbb{C}$ von $z^n = w$. Damit ist alles gezeigt. $\square$

Satz 0.10 (Fundamentaler Satz der Algebra).
Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ $(a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{C}\ \forall i \leq n)$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Konsequenz: Sei $p(z)$ wie im Satz 0.10. Dann kann $p(z)$ in ein Produkt von linearen Faktoren zerlegt werden, d.h.

$$\exists z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \text{ mit } p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$